

م. إلى 2 :

نفسية :

لتكن A جزءاً من المجموعة الجزئية والعلاقة R و B متداوية في A لغرض مع أكبر A العلاقة R بالعدد التالي :

$$\forall x, y \in A \quad x \sim y \Leftrightarrow x - y \in B$$

ان العلاقة هي علاقة - 1 - مغايرة مع A . ولذا لم نكتب $x \in A$ فان كانت العلاقة بالعدد $x \in \mathbb{R}$ على جميع مجموعة المعرفة A :

$$\bar{x} = x + \beta$$

مجموعة صفوف الكائنات منزلة بالعدد

$$A/\beta = \{ \bar{x} = x + \beta ; x \in A \}$$

البرهان

نبرهن ان العلاقة المعرفة R علاقة تكافؤ

$$\forall x, y, z \in A \Rightarrow x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$$

$$x \sim y \Rightarrow x - y \in B$$

$$y \sim z \Rightarrow y - z \in B$$

بالج

$$x - z \in B \quad (\text{نزدك الجمع})$$

تناظرية

$$\forall x, y \in A \quad x \sim y \Rightarrow y \sim x$$

$$\Rightarrow x - y \in B$$

البرهان : بما ان $x \sim y$ فالتفاضل $x - y \in B$ بالتغير نكتب

$$(x - y) = y - x \in B$$

لتكن $x \in A$ عندها

$$\{ x \sim y : y \in B \quad \bar{x} = x + \beta \}$$

دلتنا $x \in \bar{x}$

حسب التعريف

$$\Rightarrow x \sim y \Rightarrow x - y \in B$$

بناي يهـ عـر $b \in \beta$ كـيـ $a \in \alpha$

$$x - y = b \Rightarrow y = x - b \in (x) + \beta$$

$$\Rightarrow \bar{x} \subseteq (x) + \beta$$

لذا المجموعة الناتجة من عـر واهـ بانـاي

$$\bar{x} \subseteq x + \beta \quad (1)$$

$$z \in x + \beta \Rightarrow z = x + k \text{ ز } k \in \beta$$

معـهـ

عـبـ التـرـيـبـ

$$z - x = k \in \beta \Rightarrow x \mathcal{P} z \Rightarrow z \in \bar{x}$$

$$\Rightarrow x + \beta \subseteq \bar{x} \quad (2)$$

من (1) و (2) نـتـجـ $a \in \alpha$

$$\bar{x} = x + \beta$$

عـرـفـةـ :

لـيـنـ A جـمـوعـة المـتـة R و B جـمـوعـة المـتـة A لـعـنـة و الجـمـوعـة

$$A/\beta = \{ \bar{x} = x + \beta \text{ ز } x \in A \}$$

الـعـلـيـات

$$\forall (x + \beta) \text{ و } (y + \beta) \in A/\beta \quad \forall \lambda \in R$$

$$(1) (x + \beta) + (y + \beta) = (x + y) + \beta$$

$$(2) \lambda(x + \beta) = \lambda x + \beta$$

$$(3) (x + \beta)(y + \beta) = x \cdot y + \beta$$

لـيـ A/β معـ العـلـيـات السـابـقـة تـمـلـك جـمـوعـة المـتـة R و جـمـوعـة المـتـة B

مـثـالـ

$$A = \{ a, b, c, d \}$$

لـعـنـة عـلـاتـة عـيـ A عـلـة

$$R = \{ (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (c, d), (d, c) \}$$

لـيـ المـتـة R اـنـكـاسـيـة

لـيـ المـتـة R تـنـاقـظـيـة

إثبات العلاقة R متعديّة

العناصر المرتبطة

$a \sim a$

$$\bar{a} = \{a, b\}$$

$$\bar{c} = \{c, d\}$$

إثبات العلاقة R علاقة تكافؤ على المجموعة A

$$\bar{b} = \{b, a\}$$

$$\bar{d} = \{d, c\}$$

مجموعات تكافؤ عددية بعد عناصر المجموعة

نلاحظ أن

$$\bar{a} = \bar{b} \quad \wedge \quad \bar{c} = \bar{d}$$

وبالتالي لدينا فرقتا مجموعة الخارز

$$A/R = \{\bar{a}, \bar{c}\}$$

$$\bar{a} = \bar{b} \quad \text{و} \quad a \neq b$$

(علاقة تكافؤ) مجموع التكافؤ متساوية لأن عناصرها غير متساوية

• فليكن علاقة التكافؤ متساوية غير اختيارية. ~~المثل~~

البوصلة

ليزمن أولاً أن العلاقة السابقة متعديّة (متساوية عند اختيار المثل)

لتكن

$$a + \beta \sim a' + \beta, \quad b + \beta, \quad b' + \beta \in A/\beta$$

أفرضنا أن التكافؤ متساوية غير اختيارية

$$a + \beta = b + \beta$$

$$\text{و} \quad a' + \beta = b' + \beta$$

وليزمن أن

$$(a + \beta) + (a' + \beta) = (b + \beta) + (b' + \beta)$$

منهذه العلاقة استنتجنا

$$a \in a + \beta = b + \beta$$

ومنهذه $k \in \beta$ يجب ~~أن~~

$$a = b + k$$

$$a' \in a' + \beta = b' + \beta$$

لذا يجب أن (تخلط المعادلتين)

ومنهذه $k' \in \beta$ يجب أن

$$a' = b' + k'$$

البرهان

$$\begin{aligned}
 (a+B) + (a'+B) &= (a+a') + B \\
 &= [(b+k) + (b'+k')] + B \\
 &= [(b+b') + (k+k')] + B \\
 &= [(b+b') + B] + \underbrace{[(k+k') + B]}_{\in B} \\
 &= (b+b') + B + B \\
 &= (b+b') + B = (b+B) + (b'+B)
 \end{aligned}$$

ناتج العملية لا يتغير إذا غيرنا الحامل

مبرهنة :

ليكن \bar{D} هو جزئياً في A/B هو المرافق A/B لتعرف المجموعة D بالآتي

$$D = \{a ; a \in A \text{ و } a+B \in \bar{D}\}$$

وضح من خلال التعريف D : c

$$\emptyset \neq D \subseteq A$$

$$D \neq \emptyset \text{ لأن } B \in \bar{D} \text{ لأنه العنصر المحايد في } A/B$$

$$0 \in D$$

$$a+B = B \in \bar{D} \Rightarrow 0 \in D$$

نبرهن أن D هو جزئياً في A

$$\lambda, \mu \in R \text{ و } a, b \in D$$

$$\lambda a + \mu b \in D$$

نبرهن أن $a, b \in D$ يعني

$$a+B \in \bar{D} \text{ و } b+B \in \bar{D}$$

هو جزئياً في A هو جزئياً في A/B

$$\lambda(a+b) \in M(b+b) \in \bar{D}$$

فعلية النسبة للملحة +

$$\lambda(a+b) + m(b+b) \in \bar{D}$$

$$(\lambda a + b) + (mb + b) \in \bar{D}$$

$$= (\underbrace{\lambda a + mb}_{\in A}) + b \in \bar{D}$$

دعنا

$$\lambda a + mb \in D$$

لدينا قير

$$a+b, b \in B \in \bar{D}$$

$$(a+b) \cdot (b+b) \in \bar{D}$$

$$(a \cdot b) + b \in \bar{D}$$

$$\Rightarrow a \cdot b \in D$$

دعنا نكنا ان D هي جزئية في A
لنرى ان D هي B

التي هي جزئية في A

$$b + B = B \in \bar{D}$$

لكن $B \in \bar{D}$ عندها

$$B \subseteq D$$

$$B \subseteq D$$

لنرى ان $\bar{D} = D/B$

ان $B \subseteq D$ ان B هي مثلثة في D ومنه D/B هي مثلثة ولتكن ان

$$(A/B) \subseteq \bar{D} = D/B$$

لكن $\bar{a} \in \bar{D} \subseteq A/B$ عندها

$$\bar{a} = a + B, a \in A$$

دعنا نعرف D بأنه $a \in D$ أي $a \in A$

(دعنا نعرف D/B) $a \in D/B$

بالتالي $\bar{D} \subseteq D/B$ *

لكن $x \in D \subseteq A$ $x+B \in D/B$ $x+B \in \bar{D}$

$$x+B \in A/B$$

$$x+B \in \bar{D}$$

$$\Rightarrow D/B \subseteq \bar{D} \quad **$$

من ** ، يتبع أن

$$\bar{D} = D/B$$